Pojęcia wstępne teorii grafów

Izolda Gorgol

wyciąg z prezentacji

Pojęcie grafu

DEFINICJA *Grafem* G nazywamy parę $G = (V, E)$, gdzie V jest niepustym zbiorem, zaś E dowolnym podzbiorem zbioru $\{\{u, v\} : u, v \in V\}$.

$V(G)$ – zbiór wierzchołków grafu G
$v \in V(G)$ – wierzchołek grafu G
$E(G)$ – zbiór krawędzi grafu G
$e = \{u, v\} = uv$ – krawędź grafu G
Mówimy, że krawędź e jest *incydentna* z wierzchołkami u i v, a wierzchołki u i v są *incydentne* z krawędzią e.
Mówimy również, że wierzchołki u i v są wierzchołkami końcowymi krawędzi e.

TWIERDZENIE Jest $2^{\binom{n}{2}}$ wszystkich grafów na zbiorze V takim, że $|V| = n$.

DEFINICJA Wierzchołki $u, v \in V(G)$ nazywamy wierzchołkami *sąsiednimi* w grafie G wtedy i tylko wtedy, gdy $uv \in E(G)$.

Podgrafy

DEFINICJA Graf H nazywamy *podgrafem* grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy $V(H) \subset V(G)$ i $E(H) \subset E(G)$; ozn. $H \subset G$.

DEFINICJA Graf H nazywamy *podgrafem indukowanym* grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy$V(H) \subset V(G)$ i $E(H) = \{uv \in E(G) : u, v \in V(H)\}$; ozn. $H \preceq G$ lub $H = G[V(H)]$

DEFINICJA Podgrafem *rozpinającym* grafu G nazywamy dowolny podgraf H grafu G taki, że $V(H) = V(G)$.

Stopień wierzchołka i jego sąsiedztwo

DEFINICJA *Stopniem* wierzchołka v nazywamy liczbę wierzchołków sąsiednich do wierzchołka v w grafie G; ozn. $d(v)$ lub $d_G(v)$.

$\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V(G)\}$ (minimalny stopień wierzchołka w grafie)

$\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V(G)\}$ (maksymalny stopień wierzchołka w grafie)

TWIERDZENIE Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. Wówczas $\displaystyle\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

WNIOSEK Każdy graf zawiera parzystą liczbę wierzchołków stopnia nieparzystego.

DEFINICJA *Sąsiedztwem* wierzchołka v w grafie G nazywamy zbiór jego sąsiadów; ozn. $N(v)$ lub $N_G(v)$.

DEFINICJA *Domkniętym sąsiedztwem* wierzchołka v w grafie G nazywamy zbiór $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

Izomorfizm grafów

DEFINICJA *Izomorfizmem* pomiędzy grafami G i H nazywamy bijekcję $f : V(G) \longrightarrow V(H)$ taką, że $uv \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(H)$.

Jeżeli istnieje izomorfizm pomiędzy grafami G i H, to grafy te nazywamy *izomorficznymi*.

Jeżeli grafy G i H są izomorficzne, to $|V(G)| = |V(H)|$ i $|E(G)| = |E(H)|$.
Izomorfizm zachowuje też ciąg stopni wierzchołków i ogólnie strukturę grafu.

Jeśli interesuje nas tylko struktura grafu, nazwy wierzchołków pomijamy.

Podstawowe klasy grafów

DEFINICJA Grafem *pełnym* o n wierzchołkach nazywamy graf, w którym każda para wierzchołków tworzy krawędź; Ozn. K_n.

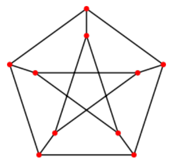
DEFINICJA Grafem *pustym* o n wierzchołkach nazywamy graf, w którym $E(O_n) = \emptyset$; ozn. O_n.

DEFINICJA Graf *dwudzielnym* nazywamy graf, którego wierzchołki można podzielić na dwa niepuste podzbiory X i Y tak, że $G[X]$ i $G[Y]$ są grafami pustymi.

Pełnym grafem *dwudzielnym* nazywamy graf dwudzielny, w którym każdy wierzchołek z X jest połączony ze wszystkimi wierzchołkami z Y; ozn. $K_{n,m}$, gdy $|X| = n$, $|Y| = m$.

Podstawowe klasy grafów - cd.

DEFINICJA Grafem *k-regularnym* nazywamy graf, w którym każdy wierzchołek ma stopień k.



graf Petersena – 3-regularny

Operacje na grafach

DEFINICJA Graf $\overline{G}$ nazywamy *dopełnieniem* grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy $V(\overline{G}) = V(G)$ oraz $uv \in E(\overline{G}) \iff uv \notin E(G)$.

DEFINICJA Niech $G_1 = (V_1, E_1)$ oraz $G_2 = (V_2, E_2)$ bedą grafami.

sumą grafów G_1 i G_2 nazywamy graf $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$,

przecięciem grafów G_1 i G_2 nazywamy graf $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$,

różnicą grafów G_1 i G_2 nazywamy graf $G_1 - G_2 = (V_1 - V_2, E_1 - E_2)$.

Symbol $G-v$ oznacza graf otrzymany z grafu G poprzez usunięcie wierzchołka v (wraz z krawędziami incydentnymi).

Symbol $G-e$ oznacza graf otrzymany z grafu G poprzez usunięcie krawędzi e (ale bez jej wierzchołków końcowych).